数学Ⅱ　p 159の解答・解説

1　解答例

1kmは 10^3 mであるから

求める時間は $\dfrac{10^3}{3.0\times10^8}=\dfrac{1}{3}\times10^{3-8}=0.333\cdots\times10^{-5}$

$\fallingdotseq 3.3\times10^{-6}$ 秒

したがって，$\square=-6$

参考　(時間)＝(距離)÷(速さ)

2　解答例

(1)　$\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{6\cdot9}=\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\cdot3^3}=3\sqrt[3]{2}$

参考　ルート(2乗根)を外すイメージと同じように

ex) $\sqrt{20}=\sqrt{2^2\cdot5}=2\sqrt{5}$

別解　指数に変形して指数法則を使う

$\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2\cdot3}\sqrt[3]{3^2}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\cdot3^1=3\sqrt[3]{2}$

(2)　$\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{2^4\cdot3}-\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3}$

(3)　$(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$

$=(\sqrt[4]{3})^2-(\sqrt[4]{2})^2$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

別解

$=3^{\frac{2}{4}}-2^{\frac{2}{4}}$

$=3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(4)　$\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+1+2^{-\frac{2}{3}}\right)$

$=\left(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}+\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

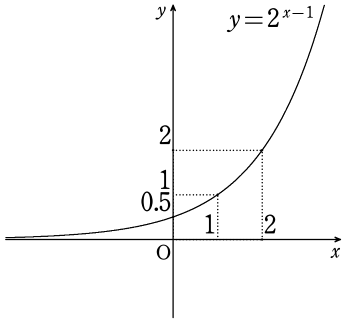
$=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$=2^1-2^{-1}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

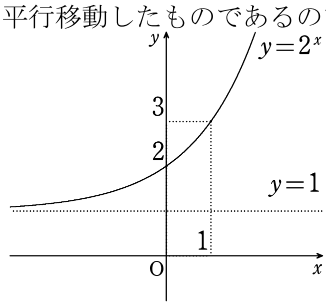
参考　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　を利用

3　解答例

(1)　$y=2^{x-1}$のグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に1だけ平行移動したものであるので，以下の図のようになる。



(2)　$y=2^x+1$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを y 軸方向に1だけ平行移動したものであるので，以下の図のようになる。



4　解答例

(1)　$3^{3x-1}=81$

$3^{3x-1}=3^4$

よって

$3x-1=4$

$x=\dfrac{5}{3}$

(2)　$2^{1-x}=\sqrt[3]{2}$

$2^{1-x}=2^{\frac{1}{3}}$

よって

$1-x=\dfrac{1}{3}$

$x=\dfrac{2}{3}$

(3)　$4^x-32>0$

$2^{2x}>2^5$

底2は1より大きいから

$2x>5$

$x>\dfrac{5}{2}$

参考　$4^x=(2^2)^x=2^{2\times x}=2^{2x}$

(4)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{1-x}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(1-x)}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は1より小さいから

$2(1-x)\geqq2x$

$x\leqq\dfrac{1}{2}$

5　解答例

(1)　$2^{2x+1}-2^{x+3}-64=0$

$2\cdot(2^x)^2-8\cdot2^x-64=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$2t^2-8t-64=0$

$t^2-4t-32=0$

$(t-8)(t+4)=0$

$t>0$ より　$t=8$

$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

参考　$2^{2x+1}=2^1\cdot2^{2x}=2\cdot2^{x\times2}=2\cdot(2^x)^2$

(2)　$2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-4>0$

$2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+7\left(\frac{1}{2}\right)^x-4>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり

$2t^2+7t-4>0$

$(2t-1)(t+4)>0$

$t<-4$，$\frac{1}{2}<t$

$t>0$ より　$t>\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^1$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから

$x<1$

6　解答例

$y=4^x-2^{x+1}+3$　$(x<2)$

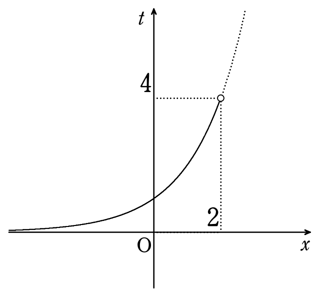
$2^x=t$ とおくと，$t>0$ …①

また $x<2$ について底2は1より大きいので

$2^x<2^2$

$t<4$ …②

①，②より t のとりうる値の範囲は $\mathbf{0<t<4}$　…③



グラフで考えてもよい

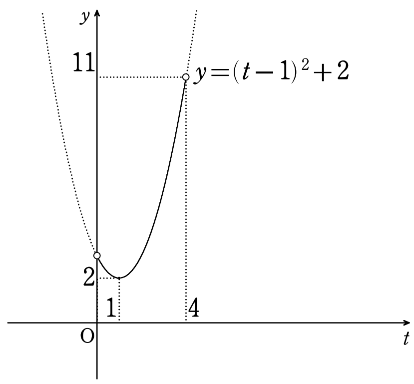
また，関数を変形すると

$y=(2^x)^2-2\cdot2^x+3$

$=t^2-2t+3$

$=\mathbf{(t-1)^2+2}$　である。

③の範囲で考えると以下のグラフになる。



よって，　$\mathbf{t=1}$

$2^x=1$

$2^x=2^0$

すなわち，**$x=0$ のとき最小値2**をとる。

答　(ア)0　(イ)4　(ウ)1　(エ)2　(オ)1　(カ)0　(キ)2

７　【解答例】

(1) $\log_{10}\frac{3}{8}=\log_{10}\frac{3}{2^3}=\log_{10}3-\log_{10}2^3$　← ③

$=\log_{10}3-\log_{10}2^3$　← ④

$=\log_{10}3-3\log_{10}2$

$=b-3a$

(2) $\log_{10}\sqrt[3]{6}=\log_{10}6^{\frac{1}{3}}$　← ①

$=\frac{1}{3}\log_{10}6$　← ④

$=\frac{1}{3}\log_{10}(2\times 3)$

$=\frac{1}{3}(\log_{10}2+\log_{10}3)$　← ②

$=\frac{1}{3}(a+b)$

(3) $\log_2 3=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$　← ⑤

$=\frac{b}{a}$

(4) $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2$　← ③

$=1-a$

であるから

$\log_{10}15=\log_{10}(3\times 5)$

$=\log_{10}3+\log_{10}5$　← ②

$=b+(1-a)$

$=1-a+b$

【参考】

累乗根と指数　$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

対数の性質　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N\cdots\cdots$ ②

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　$\cdots\cdots$ ③

$\log_a M^k=k\log_a M$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ④

底の変換公式　$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑤

８　【解答例】

(proof)

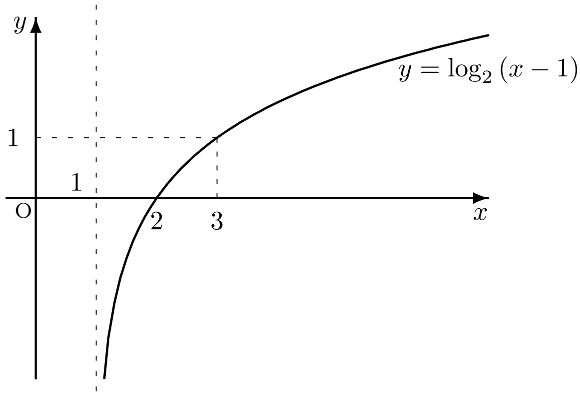
底の変換公式により，対数の底をすべて a にすれば，

（左辺）$=\log_a b\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\frac{\log_a a}{\log_a c}=1=$（右辺）

(q.e.d.)

９　【解答例】

$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向へ 1 平行移動する。



１０　【解答例】

(1) 真数は正であるから，$(x+1)^2>0$

すなわち　$x\neq -1$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ①

方程式より　$\log_3(x+1)^2=\log_3 3^2$

$(x+1)^2=3^2$

$x^2+2x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$x=-4,\ 2$

解は ① を満たしている。

(2) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x+7>0$

すなわち　$x>0\cdots\cdots\cdots$ ①

方程式より　$\log_2 x(x+7)=\log_2 2^3$

$x(x+7)=2^3$

$(x+8)(x-1)=0$

$x=-8,\ 1$

① より　$x=1$

(3) 真数は正であるから $x-1>0$

すなわち　$x>1$ $\cdots\cdots\cdots$ ①

不等式より　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x<\frac{5}{4}$ $\cdots\cdots\cdots$ ②

① かつ ② より，求める不等式の解は

$1<x<\frac{5}{4}$

(4) 真数は正であるから $x+1>0$ かつ $x-2>0$

すなわち　$x>2$ ……………①

不等式より，$\log_2(x+1)(x-2)<\log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから

$$(x+1)(x-2)<2^2$$
$$(x+2)(x-3)<0$$
$$-2<x<3 \cdots\cdots ②$$

① かつ ② より，求める不等式の解は

$$2<x<3$$

【参考】

● 対数 $\log_a M$ の M を真数と呼ぶ。
M の値は必ず正なので，方程式や不等式の問題で一番最初に「真数は正であるから」の条件が必要。

● $p=\log_a a^p$ を用いて，(1) は不等式の右辺を $2=\log_3 3^2$ と変形している。(2)〜(4) も同様。

● 不等式で対数を外すときは底に注意する。

底 $a>1$ のとき，　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

底 $0<a<1$ のとき，$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

解答を書くときは「底○は 1 より大きいから」または「底○は 1 より小さいから」の記述を必ず書く。

１１　【解答例】

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{10^4}$$
$$n\log_{10}\frac{1}{2}<\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)^4$$
$$n\log_{10}\frac{1}{2}<4\log_{10}\frac{1}{10}$$
$$n\log_{10}2^{-1}<4\log_{10}10^{-1}$$
$$-n\log_{10}2<-4\log_{10}10$$
$$-n\times 0.3010<-4$$
$$n\times 0.3010>4$$
$$n>\frac{4}{0.3010}=13.28\cdots$$

この不等式を満たす最小の自然数 n は $n=14$

１２　【解答例】

常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=10\log_{10}\frac{1}{5}=10\log_{10}5^{-1}$$
$$=-10\log_{10}5=-10\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=-10(\log_{10}10-\log_{10}2)$$
$$=-10(1-0.3010)$$
$$=-6.990$$

これより，$\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=10^{-6.990}$　であるから

$$10^{-7}<10^{-6.990}<10^{-6}$$

すなわち　$10^{-7}<\left(\frac{1}{5}\right)^{10}<10^{-6}$

よって，$\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第 7 位に初めて 0 でない数が現れる。

１３　【解答例】

$$2(\log_2 x)^2+\log_2 x^3\leqq 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

真数は正であるから，$x>0$ かつ $x^3>0$

すなわち　$x>\underset{ア}{0}$ ……………②

不等式 ① を変形して，

$$2(\log_2 x)^2+3\log_2 x-2\leqq 0$$

$\log_2 x=t$ とおくと不等式 ① は

$2t^2+\underset{イ}{3}t-\underset{ウ}{2}\leqq 0$ と変形できる。

$$(t+2)(2t-1)\leqq 0$$

これを解くと　$-\underset{エ}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{\underset{オ}{2}}$

t を元に戻して　$-2\leqq\log_2 x\leqq\frac{1}{2}$

$$\log_2 2^{-2}\leqq\log_2 x\leqq\log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

底 2 は 1 より大きいから，

$$2^{-2}\leqq x\leqq 2^{\frac{1}{2}}$$

すなわち　$\frac{1}{4}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ ………③

③ は ② を満たしている。

よって，① を満たす x の値の範囲は

$\frac{1}{\underset{カ}{4}}\leqq x\leqq\sqrt{\underset{キ}{2}}$ である。

数学Ⅱ　ｐ１７３の解答・解説

1　解答例

(1)　$(2^6)^{\frac{2}{3}}\times(2^4)^{-\frac{1}{4}}$

$=2^4\times2^{-1}$

$=2^3$

$=8$

(2)　$3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{3}{4}}$

$=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$

$=3^{\frac{1}{4}}$

$=\sqrt[4]{3}$

指針　指数法則を用いて計算する。

(2) では，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ を用いて表記を変換しよう。

2　解答例

(1)　$2^{-1}\leqq2^x\leqq2^3$

底 2 は 1 より大きいので，　$-1\leqq x\leqq3$

(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^0\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので，　$-2\leqq x\leqq0$

方針　[1]　$a>1$ のとき，　$p<q \Leftrightarrow a^p<a^q$

[2]　$0<a<1$ のとき，　$p<q \Leftrightarrow a^p>a^q$

3　解答例

(1)　$3^{x+1}=3^{\frac{2}{3}}$

$x+1=\frac{2}{3}$

$x=-\frac{1}{3}$

(2)　$2^{3x}\leqq2^{2(x+1)}$

底 2 は 1 より大きいので，

$3x\leqq2(x+1)$

$x\leqq2$

(3)　$2^{-(x-1)}\geqq2^{\frac{x}{2}}$

底 2 は 1 より大きいので，

$-x+1\geqq\frac{x}{2}$

$x\leqq\frac{2}{3}$

4　解答例

(1)　$\log_5\sqrt{3}+\log_5 2\sqrt{2}-\log_5 2\sqrt{6}$

$=\log_5\frac{\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$

$=\log_5 1$

$=0$

(2)　$\left(\log_2 3+\frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)$

$=5$

方針　変換公式を用いて底を揃える。

5　解答例

(1)　真数は正であるから，　$(x+1)(x+2)>0$

すなわち，　$x<-2,\ -1<x$ …①

$\log_{0.5}(x+1)(x+2)=\log_{0.5}0.5^{-1}$

$(x+1)(x+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x^2+3x=0$

これを解いて，　$x=-3,\ 0$

これらは①を満たすので解である。

(2)　真数は正であるから，　$x-2>0$ かつ $2x-7>0$

すなわち，　$x>\frac{7}{2}$ …①

$\log_3(x-2)(2x-7)=\log_3 3^2$

$(x-2)(2x-7)=9$

$2x^2-11x+5=0$

これを解いて，　$x=\frac{1}{2},\ 5$

①より，　$x=5$

(3)　真数は正であるから，　$3-x>0$ かつ $4x>0$

すなわち，　$0<x<3$ …①

$\log_{0.5}(3-x)^2\geqq\log_{0.5}4x$

底 0.5 は 1 より小さいので，　$(3-x)^2\leqq4x$

整理して，　$x^2-10x+9\leqq0$

これを解いて，　$1\leqq x\leqq9$

①より，　$1\leqq x<3$

(4)　真数は正であるから，　$x>0$，　$x-2>0$

すなわち，　$x>2$ …①

$\log_3 x(x-2)\geqq\log_3 3$

底 3 は 1 より大きいので，　$x(x-2)\geqq3$

整理して，　$x^2-2x-3\geqq0$

これを解いて，　$x\leqq-1$，　$3\leqq x$

①より，　$x\geqq3$

６　解答例

方針

正の数Nの整数部分が n 桁である

$\Leftrightarrow\quad n-1 \leqq \log_{10} N < n$

$\log_{10} 6^{20} = 20\log_{10}(2\cdot 3)$

$= 20(\log_{10}2 + \log_{10}3)$

$= 20(0.3010 + 0.4771)$

$= 15.562$

$15 \leqq \log_{10} 6^{20} < 16$ より，16桁

７　解答例

方針

小数Mの小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる

$\Leftrightarrow\quad -n \leqq \log_{10} M < -(n-1)$

$\log_{10} 0.4^n = n\log_{10}\dfrac{4}{10}$

$= n(2\log_{10}2 - 1)$

$= -0.398n$

題意より，　$-3 \leqq -0.398n < -2$

$5.02\cdots < n \leqq 7.53\cdots$

ゆえに，求める自然数 n は，　$n = 6,\ 7$

８　解答例

ある時点における菌の個数を $a\ (a>0)$ とする。

その時点から x 時間後の菌の個数に関して

$a\cdot 2^{2x} > 100000a$

とおくと，

$2^{2x} > 10^5$

$\log_{10} 2^{2x} > \log_{10} 10^5$

$2x\cdot 0.3010 > 5$

$x > 8.305\cdots$

30分毎に２倍なので，
１時間で４倍になる。
すなわち，　x 時間で
4^x 倍になる。

よって，9時間後

数学Ⅱ　ｐ１７４の解答・解説

9　解答例

(1)　$x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2$
$=3^2-2$
$=7$

(2)　$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2$
$=7^2-2$
$=47$

方針　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ において，
$b=a^{-1}$ とおくと
$a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2$ である

また，
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ において，
$b=a^{-1}$ とおくと
$a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1})$ である

10　解答例

(1)　$-3\leqq x\leqq 3$ より，$-2\leqq x+1\leqq 4$
底２は１より大きいので，$2^{-2}\leqq 2^{x+1}\leqq 2^4$
よって，　$\frac{1}{4}\leqq y\leqq 16$

(2)　$0\leqq x\leqq \sqrt{2}$ より，$\sqrt{2}\leqq x+\sqrt{2}\leqq 2\sqrt{2}$
底 $\frac{1}{2}$ は１より小さいので，
$\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}\leqq \log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{2})\leqq \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$

ここで，$\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}=\dfrac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2\frac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 2^{\frac{3}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\dfrac{3}{2}$

$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=\dfrac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2\frac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}{\log_2 2^{-1}}=-\dfrac{1}{2}$

よって，$-\frac{3}{2}\leqq y\leqq -\frac{1}{2}$

11　解答例

(1)　$2^{\log_2 3}=a$ とおくと，$\log_2 a=\log_2 3$
よって，　$a=3$

指針　$a>0$，$a\neq 1$ で $M>0$ とするとき，
$$M=a^p \Leftrightarrow \log_a M=p$$

(2)　$100^{\log_{10}\sqrt{2}}=a$　とおくと，
$(10^2)^{\log_{10}\sqrt{2}}=a$
$10^{2\log_{10}\sqrt{2}}=a$
$10^{\log_{10}2}=a$
$\log_{10}a=\log_{10}2$
$a=2$

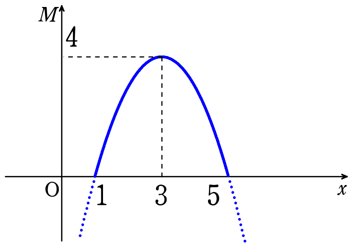
研究　$a^{\log_a M}=M$ は知っておいてもよいでしょう

12　解答例

真数は正であるから，$x-1>0$ かつ $5-x>0$
すなわち，$1<x<5$ …①

$y=\log_2(x-1)(5-x)$
$M=(x-1)(5-x)$ とおくと，
$M=-x^2+6x-5$
$=-(x-3)^2+4$

①より，$0<M\leqq 4$



与えられた関数の対数の底２は１より大きいので，
M が最大のとき，y も最大になる
すなわち，$x=3$ のとき最大値 $\log_2 4=2$

13　解答例

証明
$2^x=5^y=10^z$ の各辺の常用対数をとると，
$\log_{10}2^x=\log_{10}5^y=\log_{10}10^z$
$x\log_{10}2=y\log_{10}5=z$
これより，$x=\dfrac{z}{\log_{10}2}$，$y=\dfrac{z}{\log_{10}5}$ として用いる。

(左辺)$=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
$=\dfrac{\log_{10}2}{z}+\dfrac{\log_{10}5}{z}$
$=\dfrac{\log_{10}2+\log_{10}5}{z}$
$=\dfrac{\log_{10}10}{z}$
$=\dfrac{1}{z}=$(右辺)

14　解答例

方針　２数の常用対数をとって考える。

$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$
$\log_{10}3^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log_{10}3=0.4771\sqrt{2}$

$(0.6020)^2=0.362404$
$(0.4771\sqrt{2})^2=0.45524882$

このことから，$(\log_{10}4)^2<(\log_{10}3^{\sqrt{2}})^2$
$\log_{10}4>0$ かつ $\log_{10}3^{\sqrt{2}}>0$ より
$\log_{10}4<\log_{10}3^{\sqrt{2}}$

底 10 は 1 より大きいので，　$4<3^{\sqrt{2}}$

15　解答例

(1)　$\log_{10}\sqrt[3]{9}=\log_{10}3^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_{10}3=\frac{2}{3}\times0.4771$
$=0.318066\cdots=0.3181$

(2)　$\log_{10}M=0.3181$ より
0.3181 の値に近い数を常用対数表から見つけると
$M=2.08$

16　解答例

与えられた不等式は，底 10 が 1 より大きいので，各辺の常用対数をとっても大小関係は変わらない。

$\log_{10}2^n<\log_{10}3^{20}<\log_{10}2^{n+1}$
$n\log_{10}2<20\log_{10}3<(n+1)\log_{10}2$
$n\times0.3010<20\times0.4771<(n+1)\times0.3010$

(左辺)<(中辺)より，
$n\times0.3010<20\times0.4771$
$n<31.70\cdots$

(中辺)<(右辺)より，
$20\times0.4771<(n+1)\times0.3010$
$n>30.70\cdots$

このことから求める n は，　$n=31$