

# [方程式の整数解(終り)] 解答

## 39 【実戦演習】

(1) 方程式  $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$  ……① を考える。

方程式①を  $x$  についての2次方程式とみて、解の公式を用いて解くと、

$$x = -\left(y - \boxed{2}\right) \pm \sqrt{-\boxed{2}y^2 + \boxed{4}y + \boxed{9}}$$

となるが、①が整数解をもつことから、

$$-\boxed{1}y^2 + \boxed{ウ}y + \boxed{エ} \geq 0 \text{ であると同時にその値が平方数でなければならない。}$$

そのような  $y$  の値は全部で  $\boxed{2}$  個あることから、

方程式①を満たす整数  $x, y$  の組は全部で  $\boxed{4}$  個あり、これら  $\boxed{カ}$  組のうち

$x$  の値が最小となる組は  $(x, y) = (\boxed{-3}, \boxed{2})$  である。

(次のページに続く)

(1)  $x = \text{注目}$

$$x^2 + 2(y-2)x + 3y^2 - 8y - 5$$

→ 解の公式より

$$x = -(y-2) \pm \sqrt{(y-2)^2 - 1 \cdot (3y^2 - 8y - 5)}$$

$$= -(y-2) \pm \sqrt{-2y^2 + 4y + 9} \quad \text{②}$$

整数解はあ?

$$-2y^2 + 4y + 9 \geq 0$$

$$\times(-1) \quad 2y^2 - 4y - 9 \leq 0$$

$$\frac{2 - \sqrt{22}}{2} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{22}}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < \frac{2 - \sqrt{22}}{2} < -1, \quad 3 < \frac{2 + \sqrt{22}}{2} < \frac{7}{2}$$

$y$  は整数なので

$$y = -1, 0, 1, 2, 3$$

また、②は平方数にあ?

•  $y = -1$  のとき  $3 \times$

•  $y = 0$  のとき  $9 = 3^2$  OK

•  $y = 1$  のとき  $11 \times$  才

•  $y = 2$  のとき  $9 = 3^2$  OK

•  $y = 3$  のとき  $3 \times$  才

•  $y = 0$  のとき

$$x = 2 \pm 3$$

$$= 5, -1$$

$$\therefore (x, y) = (-1, 0), (5, 0) \quad \text{カ}$$

•  $y = 2$  のとき

$$x = -(2-2) \pm \sqrt{9}$$

$$= \pm 3$$

$$\therefore (x, y) = (-3, 2), (3, 2)$$

$x \text{ Min}$

↑ ↓ 4J

39

(2)  $a, b, c$  は自然数で,  $4 \leq a \leq b \leq c$  を満たすものとする。

等式  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$  .....② が成り立つとき,  $a, b, c$  を求めよう。

$a \leq b \leq c$  より  $\square$  である。ただし,  $\square$  に当てはまるものを次の ①~③ から選べ。

①  $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$     ②  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$     ③  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b}$     ④  $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

よって,  $a$  のとりうる値の最大値は  $\square$  である。

$a$  の値により順に調べていくと等式②を満たす  $(a, b, c)$  の組は全部で  $\square$  組あり,

そのうち

$c$  の値が最も大きいものは

$(a, b, c) = (\square, \square, \square)$  であり,

$c$  の値が最も小さいものは

$(a, b, c) = (\square, \square, \square)$  である。

(2)

$a \leq b \leq c \neq n$      $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$     ①

よって  $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$

Max  $a$   $\frac{1}{a}$  がおきかえ

$\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{3}{a}$   
 $a \leq 6$     よって  $a$  の Max  $6$

$\therefore 4 \leq a \leq 6 \neq n$      $a = 4, 5, 6$

•  $a = 4$  のとき ② は

$\frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{1}{4} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}$

$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b}$  かつ  $\frac{1}{b}$  がおきかえ

$\therefore \frac{1}{4} \leq \frac{2}{b}$

$b \leq 8$

$\therefore 4 \leq b \leq 8 \neq n$      $b = 4, 5, 6, 7, 8$

$a = 4$  は忘れな!

i)  $b = 4$  のとき

② は  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{c} = 0$  不適

ii)  $b = 5$  のとき

② は  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{20}$

$\therefore c = 20$

$(a, b, c) = (4, 5, 20)$

iii)  $b = 6$  のとき

② は  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{12}$

$\therefore c = 12$

$(a, b, c) = (4, 6, 12)$

iv)  $b = 7$  のとき

$\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{c} = \frac{3}{28}$  不適

v)  $b = 8$  のとき

② は  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{8} \therefore c = 8$

$(a, b, c) = (4, 8, 8)$



$\frac{c}{1} = \frac{15}{2}$   
 $\frac{c}{1} = 7.5$

$\frac{5}{1} + \frac{6}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore b = 6.25$

$(a, b, c) = (5, 5, 10)$

$\frac{c}{1} = \frac{10}{1} \therefore c = 10$   
 $\frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore b = 5.5$

$b = 5, 6$

$\therefore \frac{5}{1} = \frac{b}{2} = \frac{3}{1}c$

$\frac{5}{1} = \frac{b}{2}$   
 $\frac{5}{1} = \frac{3}{1}c$

$\frac{10}{3} = \frac{b}{2}$

$\frac{10}{3} = \frac{b}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{1} + \frac{c}{1} = \frac{10}{3}$

$\frac{6}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore a = 5.5$

$(a, b, c) = (6, 6, 6)$   
 $C \text{ Min}$

$(a, b, c) = (4, 5, 20)$   
 $C \text{ Max}$

$(a, b, c) = (6, 6, 6)$

$\therefore c = 6$

$\frac{c}{1} = \frac{6}{1}$

$\frac{6}{1} + \frac{6}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$a = 6, b = 6.25$

$\therefore b = 6$

$b = 6, 4$

$\frac{3}{1} = \frac{b}{2}$

$\frac{3}{1} = \frac{b}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{1} + \frac{c}{1} = \frac{3}{1}$

$\frac{6}{1} + \frac{b}{1} + \frac{c}{1} = \frac{1}{2}$

$\therefore a = 6.25$