数学Ⅱ　ｐ１４３の解答・解説

9　解答例

(1)　(左辺)$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$=1+\sin 2\alpha=$(右辺)

参考　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (相互関係の公式)

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ (2倍角の公式)

(2)　(左辺)$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=$(右辺)

参考　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ (2倍角の公式)

$=2\cos^2\alpha-1$

$=1-2\sin^2\alpha$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$(相互関係の公式)

10　解答例

(1)　$2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0$

$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\sin\theta=0,\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

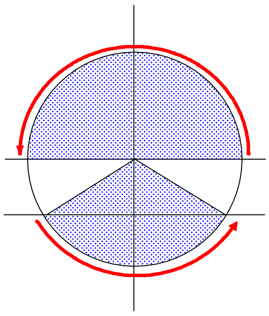
(2)　$1-2\sin^2\theta<\sin\theta+1$

$2\sin^2\theta+\sin\theta>0$

$\sin\theta(2\sin\theta+1)>0$

$\sin\theta<-\dfrac{1}{2},\ \sin\theta>0$

$0<\theta<\pi,\ \ \dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$



11　解答例

(1)　左辺に「三角関数の合成」を適用し，

$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

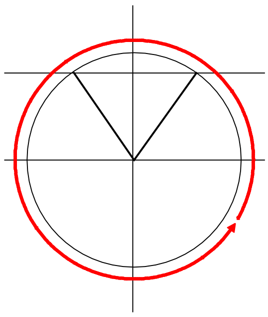
$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

よって，　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$



参考　「三角関数の合成」

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

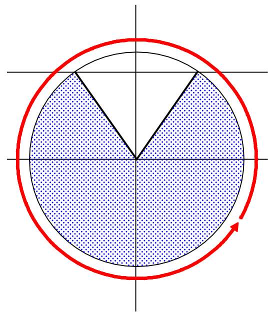
ただし，　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)　左辺に「三角関数の合成」を適用し，

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，

$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$



$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3},$

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq x-\dfrac{\pi}{6}<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{5}{6}\pi\leqq x<2\pi$

12　解答例

(1)　$4\sin x+3\cos x=\sqrt{4^2+3^2}\sin(x+\alpha)$

$=5\sin(x+\alpha)$

ただし，　$\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\quad \sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

よって，　y の最大値は $\sqrt{5}$ ，最小値は $\sqrt{-5}$

参考　定義域（ x の範囲）がすべての実数なので，
sin（正弦）の値は -1 以上で 1 以下まで
取り得る。

3　解答例

(1)　$(\text{左辺})=\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin^2\theta}=(\text{右辺})$

参考　等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ は,
$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$ のようにして
用いることがある。

(2)　$(\text{左辺})=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}$

$=\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=(\text{右辺})$

4　解答例

(1)　$1-2\sin^2 x=\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\sin x=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

$\sin x<-1,\ \dfrac{1}{2}<\sin x$

$0\leqq x<2\pi$ より，　$-1\leqq\sin x\leqq 1$
ゆえに，　$\sin x<-1$ は不適

$\sin x>\dfrac{1}{2}$ より，　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

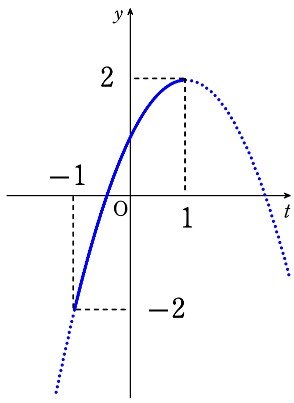
6　解答例

$y=\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)+2\sin\theta+\dfrac{1}{2}$

$=-\sin^2\theta+2\sin\theta+1$ …①

ここで，　$\sin\theta=t$ とおくと，　$-1\leqq t\leqq 1$
①は，　$y=-t^2+2t+1$ …②
と変形できる。

$-1\leqq t\leqq 1$ において
$y=-(t-1)^2+2$ の
の最小値を捉える。



$t=-1$ のとき
y は最小値 -2 をとる。

すなわち,
$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき
y は最小値 -2 をとる。

7　解答例

$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ より，　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，　$-1\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

よって，　$-2\leqq y\leqq 2$

したがって,

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$

すなわち，　$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値2

$x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

すなわち，　$x=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき最小値 -2

8　(1)　【解答例】

(1)　$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗して

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}\quad\cdots①$

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{9}\quad\cdots②$

① と ② を両辺加えると

$$\begin{array}{rl} & \sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}\quad\cdots①\\ +) & \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{9}\quad\cdots②\\ \hline \end{array}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+ 2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$$

$$1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=\frac{13}{36}$$

$$1+2\cos(\alpha-\beta)+1=\frac{13}{36}$$

$$2\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{36}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}$$

【参考】

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　　**(加法定理)**

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　**(相互関係)**

(2)　【解答例】

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+4}{1-2\times4}=-\dfrac{6}{7}$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta+\gamma)&=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}\\&=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}\\&=\frac{-\frac{6}{7}+13}{1-\left(-\frac{6}{7}\right)\times13}=1\end{aligned}$$

9　【解答例】

(proof)

$$(\text{左辺})=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

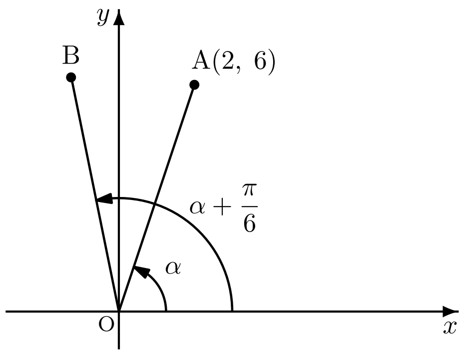
←分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割る

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=(\text{右辺})$$

(q.e.d.)

１０　【解答例】



動径 OA と x 軸の正の部分のなす角を α とおくと

動径 OB と x 軸の正の部分のなす角は $\alpha+\dfrac{\pi}{6}$ である。

点 A(2, 6) について

$$\mathrm{OA}\cos\alpha=2,\ \mathrm{OA}\sin\alpha=6$$

であり，OA$=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ だから

$$2\sqrt{10}\cos\alpha=2,\ 2\sqrt{10}\sin\alpha=6$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}\quad\cdots①$$

点 B の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\mathrm{OB}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=x,\ \mathrm{OB}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=y$$

であるから

$$\begin{aligned}x&=\mathrm{OB}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{OA}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\mathrm{OA}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=2\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{2}\right)\quad\leftarrow ①\text{ 代入}\\&=\sqrt{3}-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{OB}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\mathrm{OA}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\mathrm{OA}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=2\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{2}\right)\quad\leftarrow ①\text{ 代入}\\&=3\sqrt{3}+1\end{aligned}$$

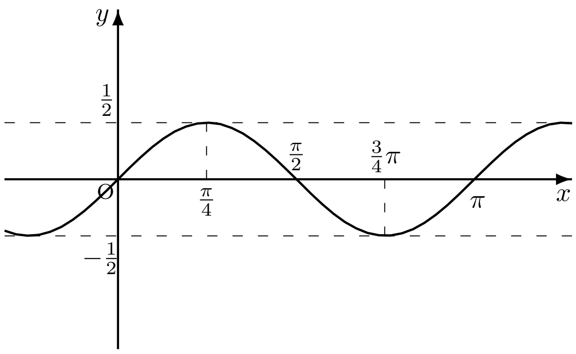
以上より，求める点 B の座標は

$$(\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}+1)$$

１１　(1) 【解答例】

$y = \sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

この関数の周期は $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$



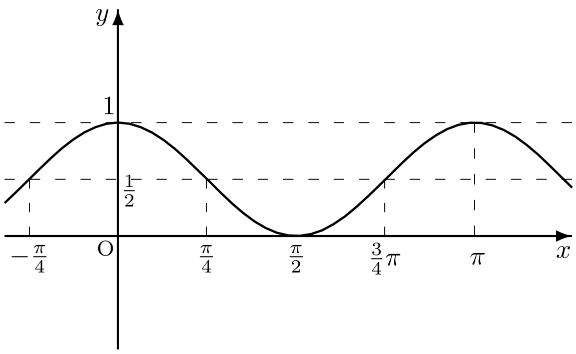
(2) 【解答例】

２倍角の公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ を変形して

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ だから

$y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$

この関数の周期は $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$



【参考】

$y = \sin kx$，$y = \cos kx$ の周期は $\dfrac{2\pi}{k}$

$y = \tan kx$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$

１２　【解答例】

２倍角の公式より，

$2\sin x \cos x = \sin 2x \iff \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x \ \cdots$①

$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \iff \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ \cdots$②

① と ② を与えられた関数の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) \qquad \leftarrow \text{合成} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

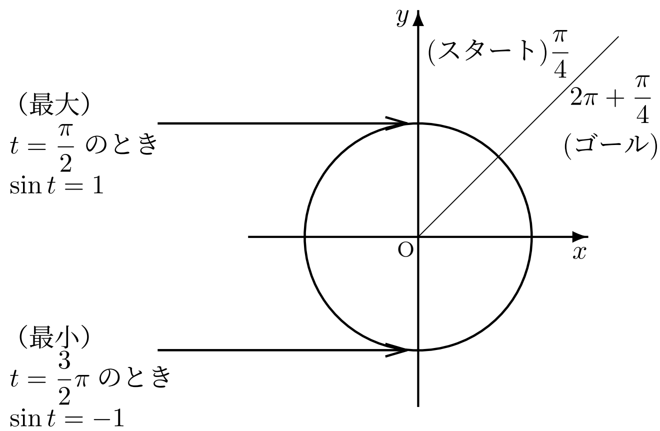
ここで，$2x + \dfrac{\pi}{4} = t$ とおくと $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t \ \cdots$③

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$2 \cdot 0 \leqq 2 \cdot x \leqq 2 \cdot \pi$

$$0 + \frac{\pi}{4} \leqq 2x + \frac{\pi}{4} \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4} \ \cdots ④$$

④ の範囲で ③ の値域を考えると



図より，最大値について

$t = \dfrac{\pi}{2}$ から，$2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{8}$

③ より $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

最小値について

$t = \dfrac{3}{2}\pi$ から，$2x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ を解くと $x = \dfrac{5}{8}\pi$

③ より $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

以上より，$x = \dfrac{\pi}{8}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \dfrac{5}{8}\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

１３　【解答例】

(1)　　$t=\sin x+\cos x$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$

$$t^2=1+2\sin x\cos x$$

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\quad\cdots①$$

① を関数の式に代入して

$$\begin{aligned}y&=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x\\&=2\cdot\frac{t^2-1}{2}+t\\&=t^2+t-1\end{aligned}$$

(2) $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

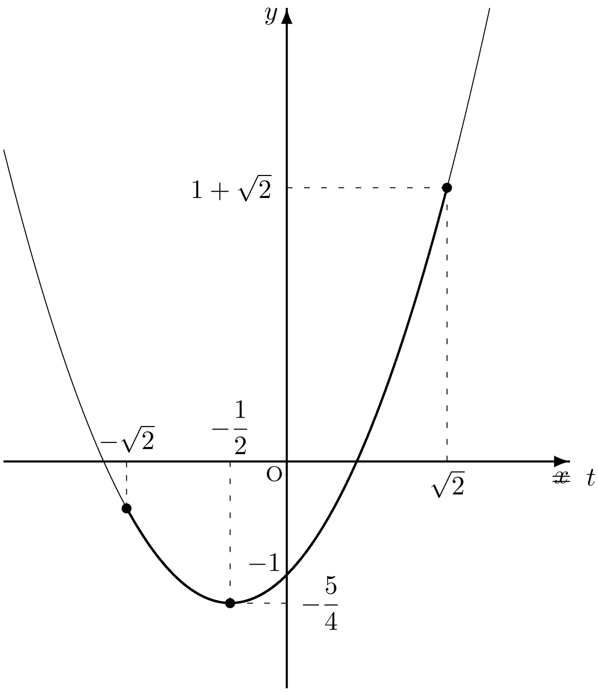
$$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) (1) の式を平方完成して

$$\begin{aligned}y&=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\\&=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

(2) より定義域が $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ なので，
下のようなグラフがかける。



右端の点の y 座標については

$t=\sqrt{2}$ のとき，$y=(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-1=1+\sqrt{2}$

以上より，最大値 $1+\sqrt{2}$，最小値 $-\frac{5}{4}$