数学I　教科書P40～P53　解答　NO.3

[練習38]

菓子 A を x 個買うとすると，菓子 B は $(20-x)$ 個買うことになるから

$$200x+100(20-x)+120\leqq 3000$$

よって　　$x\leqq\frac{880}{100}=8.8$

これを満たす最大の整数は 8 。　よって，菓子 A は最大で 8 個買える。

[練習39]

走る道のりを x m とすると，歩く道のりは$(2400-x)$ m となるから

$$\frac{x}{150}+\frac{2400-x}{60}\leqq 30$$

よって　　$x\geqq 1000$

分速 150 m で走る道のりを 1000 m 以上にしなければならない。

[練習40]

(1)　$x=\pm 4$　　(2)　$-2<x<2$　　(3)　$x\leqq -5,\ 5\leqq x$

[練習41]

(1)　$|3x-4|=2$

$3x-4=\pm 2$

$x=2,\ \frac{2}{3}$

(2)　$|x-2|\leqq 3$

$-3\leqq x-2\leqq 3$

$-1\leqq x\leqq 5$

(3)　$|2x+1|>1$

$2x+1<-1$ ，$1<2x+1$

$x<-1$ ，$0<x$

[練習1]

(1)　[1]　$x\geqq 3$ のとき

$x-3=5x$

$x=-\frac{3}{4}$

これは $x\geqq 3$ を満たさない。

[2]　$x<3$ のとき

$-x+3=5x$

$x=\frac{1}{2}$

これは $x<3$ を満たす。

[1], [2] から，求める解は　$x=\frac{1}{2}$

(2)　[1]　$x\geqq -2$ のとき

$x+2>3x$

$x<1$

条件との共通範囲は　$-2\leqq x<1$

[2]　$x<-2$ のとき

$-x-2>3x$

$x<-\frac{1}{2}$

条件との共通範囲は　$x<-2$

[1], [2] から，求める解は合わせた範囲なので

$x<1$

(3)　[1]　$x\geqq 2$ のとき

$x-2<2x-1$

$x>-1$

条件との共通範囲は　$x\geqq 2$

[2]　$x<2$ のとき

$-x+2<2x-1$

$x>1$

条件との共通範囲は　$1<x<2$

[1], [2] から，求める解は合わせた範囲なので

$x>1$

[練習1]

(1)　$3\in Q$　(2)　$\sqrt{2}\notin Q$　(3)　$-\frac{3}{2}\in Q$

[練習2]

(1)　$F=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$　(2)　$G=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

(3)　$H=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\}$

[練習3]

(1)　$B\subset A$　(2)　$A=C$　(3)　$A\subset D$

[練習4]

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$

[練習5]

(1)　$A\cap B=\{5,\ 15\}$　　$A\cup B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 15\}$

(2)　$A\cap B=\{x\mid -1<x\leqq 2,\ x \text{ は実数}\}$　$A\cup B=\{x\mid -2\leqq x<3,\ x \text{ は実数}\}$

[問1]

$A\cap B\cap C=\{3,\ 5\}$　　$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11\}$

[練習6]

$A\cap B\cap C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$　　$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 18\}$

[練習7]

(1)　$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}$　(2)　$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 6,\ 8,\ 9\}$　(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(5)　$\overline{A}\cap B=\{4\}$　(6)　$A\cap\overline{B}=\{2,\ 7\}$

(7)　$A\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$　(8)　$\overline{A}\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

[練習8]

省略

[練習9]

$\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 5,\ 7\}$

よって，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ が成り立つ。

$\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$

よって，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つ。

[問題13]

(1)　$x<-\frac{29}{5}$　(2)　$x\leqq -\frac{1}{4}$　(3)　$x>1$　(4)　$x<\frac{21}{13}$

[問題14]

x は負の数であるから　$x<0$　……①

不等式を整理すると　$x>-4$　……②

①，② から　$-4<x<0$

x は整数であるから　$x=-1,\ -2,\ -3$

[問題15]

会員になる場合のシャツ 1 枚のクリーニング代は 209 円であるので

1 年間にシャツを x 枚クリーニングに出すとすると，条件から

$$1000+209x<220x$$

$$x>\frac{1000}{11}=90.9\cdots$$

これを満たす最小の自然数は 91 である。　答　91 枚以上

[問題16]

(1)　$x-5<4x+2$ から　$x>-\frac{7}{3}$　……①

$\frac{x-1}{2}\leqq\frac{3x+1}{4}-x$ から　$x\leqq 1$　……②

① と ② より　$-\frac{7}{3}<x\leqq 1$

(2)　$2x+3>x+2$ から　$x>-1$　……①

$3x>4x+2$ から　$x<-2$　……②

① と ② の 共通範囲はないから，解はない。

(3)　$5x-8\geqq 7x-2$ から　$x\leqq -3$　……①

$2x+6\leqq 3x+9$ から　$x\geqq -3$　……②

① と ② より　$x=-3$

(4)　$\frac{x+9}{3}\geqq 2-x$ から　$x\geqq -\frac{3}{4}$　……①

$2-x>\frac{3}{2}x+\frac{11}{3}$ から　$x<-\frac{2}{3}$　……②

① と ② より　$-\frac{3}{4}\leqq x<-\frac{2}{3}$

A＞B＞Cは $\begin{cases}A>B\\B>C\end{cases}$ で考える

[問題17]

(1)　$|3x-2|=10$

$3x-2=\pm 10$

$x=4,\ -\frac{8}{3}$

(2)　$|2x+5|>1$

$2x+5<-1$　または　$1<2x+5$

$x<-3,\ -2<x$

(3)　$|5x-3|\leqq 12$

$-12\leqq 5x-3\leqq 12$

$-\frac{9}{5}\leqq x\leqq 3$

数学I　教科書P40～P53　問題解答　NO.4

[問題18]

$2 \leqq |x-3|$ から　$x \leqq 1,\ 5 \leqq x$ ……①

$|x-3|<5$ から　$-2<x<8$ ……②

①と②より　$-2<x \leqq 1,\ 5 \leqq x<8$

[演習問題1]

(1) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$　(2) $x^4-8x^3+19x^2-12x$

(3) $x^4-8x^3-x^2+68x+60$　(4) x^8-32x^4+256

[演習問題2]

(1) $(2x+2y+1)(3x+3y-2)$　(2) $(x+y-z)(3x-2y+2z)$

(3) 与式 $=(x-y)^2-2(x-y)-8$
$=(x-y+2)(x-y-4)$

(4) 与式 $=2(x+y)^2+3(x+y)-9$
$=(x+y+3)(2x+2y-3)$

[演習問題3]

(1) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

$x \geqq 1$ のとき，$|x-1|=x-1$ であるから

$\sqrt{(x-1)^2}=x-1$

$x<1$ のとき，$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\sqrt{(x-1)^2}=-(x-1)=-x+1$

(2) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$
$=|x+1|-|x-1|$

$-1 \leqq x<1$ のとき，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}=(x+1)+(x-1)=2x$

[演習問題4]

(1) $x+\dfrac{1}{x}=3$　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=7$

(3) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

よって　$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-3\sqrt{5}$

(4) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=47$

(5) $x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=-21\sqrt{5}$

[演習問題5]

$1-\sqrt{2}<0$ であるから，　$x<\dfrac{-1}{1-\sqrt{2}}$

$x<\sqrt{2}+1$ ……①

$|2x+1|<6$ から　$-6<2x+1<6$

$-\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{5}{2}$ ……②

①と②より　$-\dfrac{7}{2}<x<\sqrt{2}+1$

[演習問題6]

(1) [1] $a>0$ のとき　両辺を正の数 a で割って　$x \geqq \dfrac{3}{a}$

[2] $a=0$ のとき　与えられた不等式は $0\cdot x \geqq 3$ となり，解はない。

[3] $a<0$ のとき　両辺を負の数 a で割って　$x \leqq \dfrac{3}{a}$

(2) 整理すると　$(a-4)x<2(a-4)$

[1] $a-4>0$ すなわち $a>4$ のとき　$x<2$

[2] $a-4=0$ すなわち $a=4$ のとき与えられた不等式は $0\cdot x<2\cdot 0$ となり，解はない。

[3] $a-4<0$ すなわち $a<4$ のとき　$x>2$

[演習問題7]

(1) $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$　(2) $4ab+4ac$

[演習問題8]

(1) 与式 $=2x^2+(3y+1)x+(y-1)(y+3)$
$=(x+y-1)(2x+y+3)$

(2) 与式 $=(x+2y)^2-5z(x+2y)-6z^2$
$=(x+2y+z)(x+2y-6z)$

(3) 与式 $=x^2+(2y+2z)x+(y-z)(y+3z)$
$=(x+y-z)(x+y+3z)$

別解 与式 $=(x+y+z)^2-4z^2$
$=(x+y+z+2z)(x+y+z-2z)$
$=(x+y+3z)(x+y-z)$

[演習問題9]

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ より

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=2^2-2\cdot(-1)=6$

[演習問題10]

(1) $(x^2+1)^2=x^4+2x^2+1$

(2) $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

[演習問題11]

(1) 与式 $=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=2\sqrt{2}$

(2) 与式 $=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

[演習問題12]

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$

ゆえに　$a=3$

また　$b=(2+\sqrt{3})-a=\sqrt{3}-1$

よって　$a=3,\ b=\sqrt{3}-1$

[演習問題13]

[1] $x<0$ のとき　$-x-2(x-2)=x+2$

$x=\dfrac{1}{2}$　これは，$x<0$ を満たさない。

[2] $0 \leqq x<2$ のとき　$x-2(x-2)=x+2$

$x=1$　これは，$0 \leqq x<2$ を満たす。

[3] $2 \leqq x$ のとき　$x+2(x-2)=x+2$

$x=3$　これは，$2 \leqq x$ を満たす。

[1]～[3]から，求める解は　$x=1,\ 3$

[演習問題14]

(1) $|2x-3| \leqq a$ から　$-a \leqq 2x-3 \leqq a$

$\dfrac{-a+3}{2} \leqq x \leqq \dfrac{a+3}{2}$

(2) $a=4$ のとき，①の解は　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{7}{2}$

これを満たす整数 x は 0，1，2，3 の　4 個

(3) ①の解は(1)より　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{2}$

数直線上で $\dfrac{3}{2}$ 前後の整数が 6 個含まれれば良いので、$4 \leqq \dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{2}<5$

$5 \leqq a<7$

参考　①の両辺を 2 で割ると　$\left|x-\dfrac{3}{2}\right| \leqq \dfrac{a}{2}$

この式からも，①の解が数直線上で $\dfrac{3}{2}$ からの距離が $\dfrac{a}{2}$ 以下である実数であることがわかる。