

[不定方程式] 解答

12 【実戦演習】

不定方程式 $167x + 58y = 1$ …… ① の整数解について考える。

(1) ユークリッドの互除法を用いると、方程式①を満たす解の一つとして

$$(x, y) = \left(-\overset{\text{アイ}}{\boxed{25}}, \overset{\text{ウエ}}{\boxed{72}} \right)$$

が求められる。よって、方程式①のすべての解は、整数 k を用いて

$$\begin{cases} x = \overset{\text{オカ}}{\boxed{58}} k - \overset{\text{アイ}}{\boxed{25}} \\ y = -\overset{\text{キクケ}}{\boxed{167}} k + \overset{\text{ウエ}}{\boxed{72}} \end{cases}$$

と表すことができる。

したがって、 $|x+y| < 1000$ を満たす解の組は全部で $\overset{\text{コサ}}{\boxed{18}}$ 個ある。

$$\begin{aligned} x+y &= 58k - 25 - 167k + 72 \\ &= -109k + 47 \end{aligned}$$

(次のページに続く)

(1)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} \overset{3}{2} \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{7}{5} \overline{) 51} \\ \underline{35} \\ 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{5} \overline{) 58} \\ \underline{5} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{2}{1} \overline{) 167} \\ \underline{1} \\ 67 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 6 \\ 49 \\ 51 \\ 116 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 51 \end{array} \end{array}$$

このやり方は3枚参照

$$\begin{array}{c|c|c} x & + & \\ \hline & 0 & \\ -3 & 1 & -3 \\ -7 & -3 & 21 \\ -1 & 22 & -22 \\ -2 & -25 & 50 \\ & 72 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{アイ} \\ \text{ウエ} \end{array}$$

$\therefore (x, y) = (-25, 72)$

①は

$$167x + 58y = 1$$

$$167(-25) + 58 \cdot 72 = 1$$

$$167(x+25) + 58(y-72) = 0$$

$$167(x+25) = -58(y-72)$$

$\swarrow \times 48$

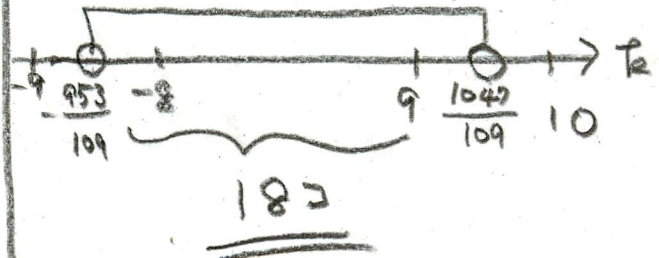
$$167(x+25) = 58(72-y)$$

167と58は互いに素なので

$$x+25 = 58k, \quad 72-y = 167k$$

$$\underline{x = 58k - 25} \quad \underline{y = -167k + 72}$$

$$\begin{aligned} |x+y| &< 1000 \\ \Leftrightarrow -1000 &< x+y < 1000 \\ -1000 &< -109k + 47 < 1000 \\ -1047 &< -109k < 953 \\ \div (-109) & \\ \frac{953}{109} &< k < \frac{1047}{109} \\ \approx -8.74 & \quad \approx 9.61 \end{aligned}$$



12

(2) 方程式①を満たす解のうち、 x が7で割ると4余る自然数である場合を考える。

このとき、 x は0上の整数 l を用いて

$$x = \overset{\text{シ}}{\boxed{7}} l + \overset{\text{ス}}{\boxed{4}}$$

$$7 \overline{) x} \begin{array}{r} l \\ \underline{4} \\ \end{array} \Leftrightarrow x = \underline{7l + 4}$$

と表せる。よって、(1)の結果より

$$\overset{\text{セソ}}{\boxed{29}} \left(\overset{\text{タ}}{\boxed{2}} k - \overset{\text{チ}}{\boxed{1}} \right) = \overset{\text{ツ}}{\boxed{7}} l$$

が得られる。

さらに、 $\overset{\text{セソ}}{\boxed{29}}$ と $\overset{\text{ツ}}{\boxed{7}}$ は互いに素であることから、整数 m を用いて

$$\left(\overset{\text{タ}}{\boxed{2}} k - \overset{\text{チ}}{\boxed{1}} \right) = \overset{\text{テ}}{\boxed{7}} m$$

と表せる。

よって、 x が7で割ると4余る自然数であるとき、方程式①を満たす解のうち x の値が最小であるものは

$$(x, y) = \left(\overset{\text{トナニ}}{\boxed{207}}, -\overset{\text{ヌネノ}}{\boxed{596}} \right)$$

である。

$$\rightarrow x = 58k - 25 > 0$$

$\therefore k > 0$ であり

$$2k - 1 = 7m \text{ であり}$$

k で最小な k を探そう!

$m = -1$ のとき	$k = -3 \times$
$m = 0$ のとき	$k = \frac{1}{2} \times$
$m = 1$ のとき	$k = 3$

よって $2k = 3$ のとき

$$x = 58 \cdot 3 - 25 = \underline{207}$$

$$y = -167 \cdot 3 + 72 = \underline{-596}$$

(2)

(1)より $x = 58k - 25$

$$\therefore 58k - 25 = 7l + 4$$

$$58k - 29 = 7l$$

$29 < k < 2$

$$29(2k - 1) = 7l$$

29 と 7 は互いに素なので

$$\underline{2k - 1 = 7m} \quad l = 29m$$

例1 不定方程式の整数解の求め方

$$167x + 58y = 1 \quad \text{--- ①}$$

①の不定方程式の整数解を求めよ

求め方

1. 互除法を行う = の順番

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \\
 2 \overline{) 167} \overline{) 58} \overline{) 51} \overline{) 116} \\
 \underline{6} \quad \underline{49} \quad \underline{51} \quad \underline{116} \\
 1 \quad 2 \quad 7 \quad 51
 \end{array}$$

2. 商 = $-(21+2)$ igit. 上から順に
剰余 = $-3, -7, -1, -2$ と、図のようになります
中央 = 0, 1 と書く

忘れたら

答え

$$\begin{aligned}
 & 167 \times (-25) + 58 \times 72 = 1 \\
 & = -4175 + 4176 = 1 \\
 & \text{OK!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -1 & \\
 -1 & -2 & \\
 -2 & &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -1 & -3 \\
 -1 & -2 & \\
 -2 & &
 \end{array}$$
おかしな数字の結果だから

$$\begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & \\
 -1 & -2 & \\
 -2 & &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & -3 \\
 -1 & -2 & 21 \\
 -2 & &
 \end{array}$$
+1/2の結果だから
おかし

$$\begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & \\
 -1 & 22 & \\
 -2 & &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & -3 \\
 -1 & 22 & 21 \\
 -2 & &
 \end{array}$$
おかし

$$\begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & \\
 -1 & 22 & -22 \\
 -2 & &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & -3 \\
 -1 & 22 & 21 \\
 -2 & -25 & 50
 \end{array}$$
おかし

$$\begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & \\
 -1 & 22 & -22 \\
 -2 & -25 & 50
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{c|c|c}
 x & + & \\
 \hline
 -3 & 0 & \\
 -7 & -3 & -3 \\
 -1 & 22 & 21 \\
 -2 & -25 & 50
 \end{array}$$
xは変数は
yは変数は
おかしな数字の結果

$$\begin{aligned}
 \text{よって } x &= -25 \\
 y &= 72
 \end{aligned}$$