[合同式]　解答

29 【実戦演習】

(1) 二つの自然数 x, y の積 xy を5で割った余りについて考える。

例えば，x を5で割った余りが2，y を5で割った余りが4のとき，0以上の整数 k, ℓ を用いて

$$x=5k+\boxed{2}^{ア},\quad y=5\ell+\boxed{4}^{イ}$$

と表せるので　5でくくる

$$xy=5\left(5k\ell+\boxed{4}^{ウ}k+\boxed{2}^{エ}\ell+\boxed{1}^{オ}\right)+\boxed{3}^{カ}$$

となり，xy を5で割った余りは $\boxed{カ}$ である。

同様に，x, y を5で割った余りが2, 3, 4の場合を調べて表にすると，以下のようになる。

xを5で割った余り	① 2	② 2	2	③ 3	④ 3	⑤ 4
yを5で割った余り	2	3	4	3	4	4
xyを5で割った余り	キ 4	ク 1	カ	ケ 4	コ 2	サ 1

また，x を5で割った余りが1のとき，任意の自然数 y に対して，y を5で割った余りを
$x\equiv 1 \pmod 5$
r とすると，xy を5で割った余りは，$\boxed{②}^{シ}$ と等しい。　$y\equiv r \pmod 5$

$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の ⓪～④ のうちから一つ選べ。　$xy\equiv 1\cdot r$
$\equiv r \pmod 5$ ②

⓪ 0　① 1　② r　③ $5r$　④ $r-1$

(次のページに続く)

(1) $xy=(5k+2)(5\ell+4) \to 5+3$
$=25k\ell+20k+10\ell+8$
$=5(5k\ell+4k+2\ell+1)+\underline{\underline{3}}$　余り

ここからは，modを使います。
xを5で割った余り2 ⟺ $x\equiv 2 \pmod 5$
yを5で割った余り4 ⟺ $y\equiv 4 \pmod 5$

$xy\equiv 2\cdot 4$
$\equiv 8\equiv 3 \pmod 5$　カ

① $x\equiv 2 \pmod 5$, $y\equiv 2 \pmod 5$
$xy\equiv 2\cdot 2$
$\equiv 4 \pmod 5$　キ

② $x\equiv 2$ (mod 5, $y\equiv 3 \pmod 5$
$x\cdot y\equiv 2\cdot 3$
$\equiv 6$
$\equiv 1 \pmod 5$

③ $x\equiv 3 \pmod 5$, $y\equiv 3 \pmod 5$
$x\cdot y\equiv 3\cdot 3$
$\equiv 9$
$\equiv 4 \pmod 5$

④ $x\equiv 3 \pmod 5$, $y\equiv 4 \pmod 5$
$xy\equiv 3\cdot 4$
$\equiv 12$
$\equiv 2 \pmod 5$

⑤ $x\equiv 4 \pmod 5$　$y\equiv 4 \pmod 5$
$xy\equiv 4\cdot 4$
$\equiv 16$
$\equiv 1 \pmod 5$

$\boxed{29}$

(2) 自然数 n に対して，2^n を5で割った余りが2のとき，

2^{n+1} を5で割った余りは ス $\boxed{4}$ であり，2^{n+2} を5で割った余りは セ $\boxed{3}$ である。

このようにして調べていくと，2^{n+m} を5で割った余りが再び2となるような

最小の自然数 m は $m=$ ツ $\boxed{4}$ である。

以上より，2^{123} を5で割った余りは タ $\boxed{3}$ である。

$$4 \overline{)123} = 30,\quad 12,\quad 3$$

(3) 自然数 n に対して，$P=2^n+3^n$ とおくと，

P を5で割った余りは チ $\boxed{1}$ または ツ $\boxed{4}$ になることはない。

ただし，$0 \leqq \boxed{チ} < \boxed{ツ} < 5$ とする。

(2) $2^n \equiv 2 \pmod 5$

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \equiv 2\cdot 2 \equiv \underline{4 \pmod 5}$ ス

$2^{n+2} = 2^2\cdot 2^n \equiv 4\cdot 2 \equiv 8 \equiv \underline{3 \pmod 5}$ セ

ここで

- $2^1 \equiv 2 \pmod 5$
- $2^2 \equiv 4 \pmod 5$
- $2^3 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$
- ☆ $2^4 \equiv 2^3\cdot 2 \equiv 3\cdot 2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$

$3^1 \equiv 3 \pmod 5$

$3^2 \equiv 9 \equiv 4 \pmod 5$

$3^3 \equiv 4\cdot 3 \equiv 12 \equiv 2 \pmod 5$

$3^4 \equiv 2\cdot 3 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$

$2^{n+m} = 2^m\cdot 2^n \equiv 2^m \times 2 \equiv 1\times 2 \equiv 2 \pmod 5$ となるので

$2^m \equiv 1$ となる m を考える

よって $\underline{m=4}$

$2^{123} = 2^3\cdot(2^4)^{30} \equiv 2^3\cdot 1^{30} \equiv 8 \equiv \underline{3 \pmod 5}$ タ

(3) $P=2^n+3^n$

- $n=1$ のとき
  $2^1+3^1 \equiv 2+3 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$
- $n=2$ のとき
  $2^2+3^2 \equiv 4+4 \equiv 8 \equiv 3 \pmod 5$
- $n=3$ のとき
  $2^3+3^3 \equiv 3+2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$
- $n=4$
  $2^4+3^4 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 5$

$n=5$ 以降はくり返しなので

P を5で割った余りは

<u>1、4 はない</u>